

Eine neue Pyramide für Kleopatra

- Zählstrategien entwickeln –

(Milena Crocoll LA 2019 SSDL OG)

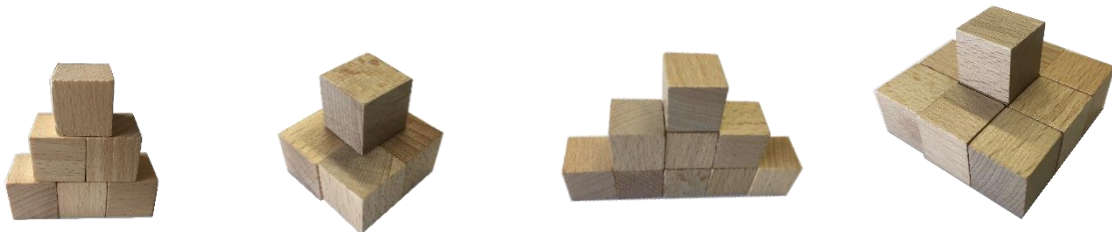


- 1 Fachlicher Hintergrund
- 2 Lernchancen (Bezüge zum Bildungsplan 2016)
- 3 Material
- 4 Möglicher Unterrichtsablauf
- 5 Ziele / Kompetenzen
- 6 Literatur
- 7 Anhang

1 Fachlicher Hintergrund

Wie können Bereiche der Geometrie und Arithmetik sinnvoll miteinander verknüpft werden? Besonders im Mathematikunterricht der Primarstufe werden geometrische Themen häufig als eine lockere Abwechslung und weniger aufgrund ihres mathematischen Gehalts eingesetzt (Franke 2007, S.9). Diese Lernumgebung versucht über die strukturellen Besonderheiten von Zahlenfolgen einen Zusammenhang zwischen geometrischen und arithmetischen Inhalten zu schaffen.

Ausgangspunkt auf der geometrischen Ebene bildet eine aus Würfeln konstruierte Pyramide. Der genaue Aufbau des pyramidenartigen Körpers obliegt den Vorstellungen der jeweiligen Klasse. Hierbei können die Würfel sowohl zueinander versetzt als auch mit der ganzen Seitenfläche aufeinandergesetzt werden. Denn die Anzahl der verwendeten Würfel kann in allen Fällen durch systematisches Zählen ermittelt werden.



Ferner sind die Schülerinnen und Schüler nicht nur dazu angehalten eine Pyramide auf der enaktiven Ebene zu entwerfen, sondern auch diese schrittweise zu erweitern, bzw. zu vergrößern. Für die jeweilige Anzahlermittlung werden stets Zählstrategien entwickelt und dokumentiert. Beispiel:



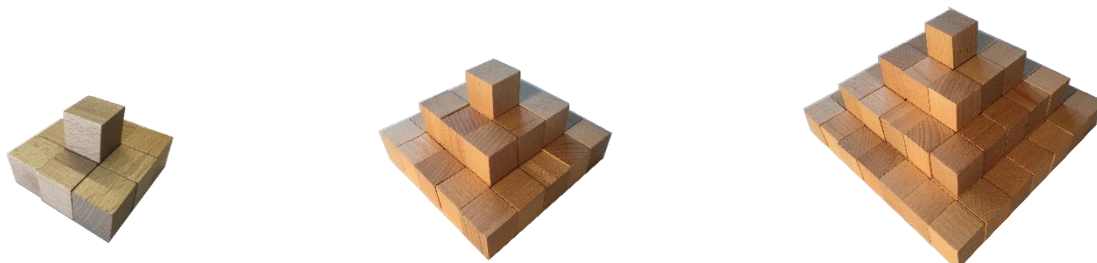
$$Pyr_2 = 1 + 2 \cdot 2 = 5$$

$$Pyr_3 = 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 14$$

$$Pyr_4 = 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 30$$

Aus arithmetischer Sicht werden in dieser Lernumgebung also Zahlenfolgen und deren Summenformeln untersucht.

Die **quadratische Pyramidenzahl** bezieht die Anzahl der Elemente, mit denen man eine Pyramide quadratischer Grundfläche bauen kann. Wie bereits erwähnt, können die Seitenflächen der Würfel auch direkt aufeinandergesetzt werden. Dies hat zu Folge, dass nun ausschließlich die ungeraden quadrierten Zahlen aufsummiert werden, also:



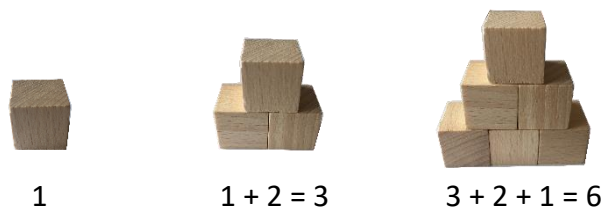
$$Pyr_2 = 1 + 3 \cdot 3 = 10$$

$$Pyr_3 = 1 + 3 \cdot 3 + 5 \cdot 5 = 35$$

$$Pyr_4 = 1 + 3 \cdot 3 + 5 \cdot 5 + 7 \cdot 7 = 84$$

In beiden Fällen besteht die Figur aus „gestapelten Quadraten“, welche für Schülerinnen und Schüler der Primarstufe räumlich-simultan als Multiplikationsaufgaben, bzw. Kernaufgaben ersichtlich sind.

Weitere Körperformen der Pyramide, welche innerhalb der Lernumgebung auftreten können, bilden die sogenannte „Treppen“ und „Doppeltreppe“ (Hengartner 2010, S.115 ff.). Die Anzahlermittlung findet über die Aufsummierung der natürlichen Zahlen (**Dreieckszahlen**) statt, also:

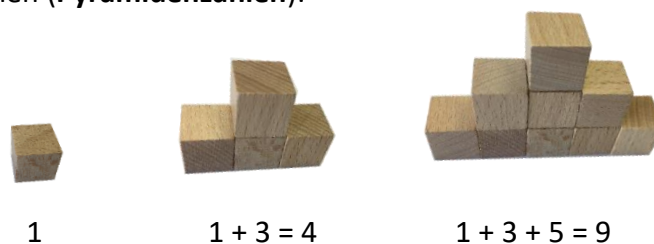


$$1$$

$$1 + 2 = 3$$

$$3 + 2 + 1 = 6$$

bzw. der ungeraden Zahlen (**Pyramidenzahlen**):



$$1$$

$$1 + 3 = 4$$

$$1 + 3 + 5 = 9$$

Da somit jeder dieser pyramidenartigen Körper durch strukturelle Besonderheiten gekennzeichnet ist, kann die Wahl der Pyramidenform offengelassen werden. Strukturen stecken jedoch nicht einfach in einer Situation oder in einem Objekt, sie müssen aktiv hineininterpretiert werden (Leuders 2017, S.13). Deshalb werden die Schülerinnen und Schüler innerhalb dieser Lernumgebung durch entsprechende Impulse unterstützt. Der handelnde Aspekt des Bauens bietet einen motivationalen und niederschweligen Einstieg für

alle Kinder. Durch das eigenständige Bauen, Beobachten und Beschreiben der wachsenden Zahlenfolge wird das Entdecken zugrundeliegender mathematischer Gesetzmäßigkeiten angeregt. Für das Ermitteln der Anzahlen bei höheren Zahlenfolgen, bzw. größeren Pyramiden sind diese zunehmend hilfreich. Die arithmetischen Summenformeln (siehe Anhang) bilden selbstverständlich nur den mathematischen Hintergrund, welcher vielfältige Entdeckungen von Strukturen zulässt, jedoch nicht als Ganzes von Schülerinnen und Schülern in der Grundschule durchdrungen oder gar erschlossen werden kann.

2 Lernchancen (Bezüge zum Bildungsplan 2016)

2.1 Standards für inhaltsbezogene Kompetenzen

3.2 Klasse 3/4

3.2.1 Zahlen und Operationen

3.2.1.1 Zahldarstellungen und Zahlbeziehungen verstehen

Die Schülerinnen und Schüler kennen verschiedene Zahldarstellungen und Zahlbeziehungen im erweiterten Zahlenraum bis 1.000.000. Sie orientieren sich sicher im dezimalen Stellenwertsystem.

Denkanstöße	Teilkompetenzen Die Schülerinnen und Schüler können
Mit Varianten geeigneter Zahlenfolgen das Entdecken von arithmetischen Mustern fördern.	(7) Gesetzmäßigkeiten in arithmetischen Mustern erkennen, beschreiben und fortsetzen

3.2.2 Raum und Form

3.2.2.2 Geometrische Figuren erkennen, benennen und darstellen

Die Schülerinnen und Schüler kennen ebene Figuren und Körper sowie deren Eigenschaften und entwickeln dadurch ihre Wahrnehmung für geometrische Strukturen in ihrer Erfahrungswelt weiter.

Denkanstöße	Teilkompetenzen Die Schülerinnen und Schüler können
Mit welchen Medien kann die Wahrnehmung der Kinder für geometrische Strukturen gefördert werden?	(5) Körper erkennen und benennen, auch in ihrer Erfahrungswelt (Quader, Würfel, Kugel, Zylinder)

2.2 Prozessbezogene Kompetenzen

2.2.1 Kommunizieren

Die Schülerinnen und Schüler können

- 1 eigene Denk- und Vorgehensweisen beschreiben
- 2 Lösungswege anderer nachvollziehen und verstehen
- 3 mathematische Fachbegriffe [...] sachgerecht verwenden
- 4 Aufgaben gemeinsam bearbeiten

2.2.2 Argumentieren

Die Schülerinnen und Schüler können

- 1 eigene Denk- und Lösungswege begründen
- 2 Begründungen suchen

2.2.3 Problemlösen

Die Schülerinnen und Schüler können

- 1 Lösungsstrategien entwickeln
- 2 Lösungsstrategien nutzen

2.2.5 Darstellen

- 1 eine Darstellung in eine andere übertragen (Ministerium für Kultus, 2016)

3 Material

Für die Durchführung dieser Lernumgebung wird folgendes Material benötigt:

- Holzwürfel
- Arbeitsblätter „Kleopatra’s Bauauftrag“
- Tippkarte

4 Möglicher Unterrichtsablauf

Einstieg

Ein Sandsturm hat sein Unwesen getrieben - „Kleopatra braucht eine neue Pyramide“. Wie könnte die neue Pyramide wohl aussehen? Die Kinder erhalten jeweils 10 Holzwürfel - hiermit könnten alle aufgeführten Möglichkeiten mit mindestens der Höhe $n=2$ gebaut werden.

Arbeitsphase 1

Der erste Auftrag lautet, innerhalb kürzester Zeit eine kleine Pyramide zu erstellen. In einem angrenzenden Museumsgang kann die Vielfalt der Baumöglichkeiten betrachtet werden.

Zwischenaustausch

Mit Sicherheit werden hierbei auch abweichende Würfelbauten auftauchen, welche Anlass zum Austausch über die Eigenschaften einer Würfelpyramide bieten. Die symmetrische Bauweise kann als besonderes Anliegen der Ägypter thematisiert werden (mögliches Gegenbeispiel: Bauweise Turm).

Problem

➤ *„Kleopatras Pyramide war 7 Würfel hoch. Wie viele Bausteine werden für den Wiederaufbau gebraucht?“*

Zur Veranschaulichung der Problemstellung kann eine Pyramide aus der Klasse verwendet werden. Zunächst soll die Anzahl der verwendeten Holzwürfel gemeinsam ermittelt werden. Die Lehrkraft möchte wissen, wie man geschickt zählen kann. Hier eignet sich die „Think-Pair-Share“-Methode, um möglichst unterschiedliche Zählstrategien aufzuzeigen.

Möglicher Impuls:

- *Die Pyramide in ihre Schichten zerlegen*
- *Siehst du die Malaufgaben? (evtl. auch Begriff der Kernaufgaben)*

Nachdem die Höhe und die Anzahl der Holzwürfel für die erste Pyramide festgehalten wurden, wird daneben die nächstgrößere Pyramide gebaut. Der Vorgang der Anzahlermittlung wird wiederholt (s. Anhang).

Arbeitsphase 2

Die Schülerinnen und Schüler arbeiten zu zweit oder in kleinen Gruppen am Bauauftrag von Kleopatra (s. Anhang). Der Auftrag beinhaltet das Bauen und Erweitern einer ausgewählten Pyramide. Die Würfelanzahl der jeweiligen Pyramide wird in eine entsprechende Wertetabelle übertragen. Zusätzlich sind die Kinder dazu aufgefordert ihre Zählstrategien zu dokumentieren (Erweiterung /Differenzierung: „eine neue Pyramide entwerfen“).

Reflexion

Die Gruppen präsentieren und vergleichen ihre Ergebnisse. Für eine Präsentation der neu entworfenen Pyramiden eignet sich ein Museumsgang, sodass die Pyramidenbauten der jeweiligen Gruppen im Fokus stehen. Die Schülerinnen und Schüler äußern sich über ihre Entdeckungen und Zählstrategien, welche auch gegenseitig erprobt werden können.

5 Ziele / Kompetenzen

Dimensionen	Ziele Ich arbeite so, dass die SuS...	Maßnahmen	Indikatoren Die SuS...
Wissen, Kenntnisse, Fertigkeiten, Reproduzieren	...wissen, wie eine Pyramide aus Würfeln gebaut werden kann; ...Eigenschaften einer Würfelpyramide kennen.	▪ Holzwürfel ▪ Zwischenaustausch	...bauen Pyramiden und benennen Merkmale.
Können, Fähigkeiten, Fertigkeiten, Zusammenhänge herstellen, Anwendung	...Pyramidenbauten fortsetzen können; ...Anzahlen in eine Tabelle übertragen können.	▪ Gruppenarbeit ▪ Kleoptras Bauftrag	...bauen und erweitern ihre Pyramiden und dokumentieren ihre Zählstrategien.
Reflexion, Bewusstheit, Transfer	...ihre Zählstrategien beschreiben können ...ihre Strategie zum Ermitteln der Anzahlen erklären und reflektieren.	▪ gemeinsame Reflexion im Museumsgang	...äußern sich zu ihren Entdeckungen und Zählstrategien.

6 Literatur

Franke, M. (2011): *Didaktik der Geometrie in der Grundschule: [Mathematik Primar- und Sekundarstufe]*. 2., Aufl., Heidelberg: Spektrum Akad. Verlag.

Hengartner, E.; Hirt, U., & Wälti, B. (2010): *Lernumgebungen für Rechenschwache bis Hochbegabte: natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht*. 2., aktualisierte u. erw. Aufl., Zug: Klett und Balmer.

Leuders, T. (2012): *Erlebnis Arithmetik: zum aktiven Entdecken und selbstständigen Erarbeiten*. Korrigierter Nachdruck, Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Ministerium für Kultus, Jugend und Sport, Baden-Württemberg (Hrsg.) (2016): *Bildungsplan der Grundschule*. Landesinstitut für Schulentwicklung. Online verfügbar unter: www.bildungsplaene-bw.de/Lde/Startseite, [zuletzt geprüft am 29.10.2019].

→ Diese Lernumgebung wurde nach einer Idee von Hengartner, Hirt und Wälti (2010) entwickelt. Ihre Lernumgebung „Mit Würfeln bauen und Zahlenfolgen entdecken“ kann als Erweiterung eingesetzt werden. Grundlegende Zahlenfolgen sind hier die Dreieckszahlen, Quadratzahlen und Rechteckzahlen.

7 Anhang

7.1 Einführung

7.2 Arbeitsblätter

7.3 Tippkarte

7.4 Summenformeln

7.5 Schülerbeispiele

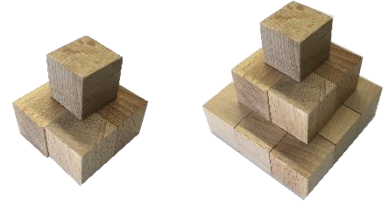
Unterrichtsbeispiel - Einführung in einem Sitzkreis:



Höhe	Zählstrategie	Anzahl
2	$2 \cdot 2 + 1$	5
3	$3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 1$	14
4	$4 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 1$	30

Ein Bauauftrag von Kleopatra

1) Baue immer die nächstgrößere Pyramide und fülle dabei die Tabelle aus:



Höhe	So zähle ich geschickt	Anzahl
2	 $2 \cdot 2 + 1$	

2) Erkläre Kleopatra, wieso deine Zählweise geschickt ist:

Eine neue Pyramide für Kleopatra

1) Entwirf eine eigene Pyramide. Achte auf die Bauregeln!

Höhe	So zähle ich geschickt	Anzahl
2		

2) Erkläre Kleopatra, wieso deine Zählweise geschickt ist:

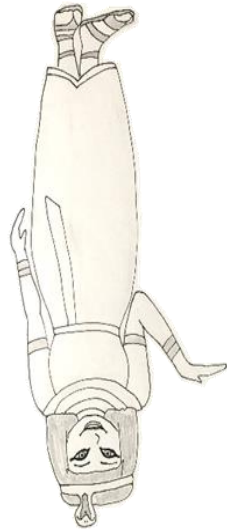
3) Kleopatra hat 80 Würfel. Wie hoch kann eure Pyramide gebaut werden?

Liebe Kleopatra,

mit 80 Würfeln kannst du unsere Pyramide _____ Würfel hoch bauen,

weil _____

_____.

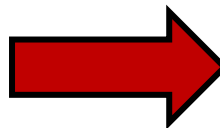


dd!l

Tip:

Zähle die Schichten der Pyramide einzeln.

Kannst du Malaufgaben entdecken?



Summenformeln

▪ Dreieckszahlen

$$d_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

▪ Pyramidenzahlen

$$p_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$$

▪ Die quadratische Pyramidenzahl

$$\sum_{i=1}^n i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

- Ohne Anspruch auf Richtigkeit, nenne ich diese Zahlenfolge „**ungerade quadratische Pyramidenzahl**“.

$$\sum_{i=1}^n (2i-1)^2 = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2(n-1)-1)^2 + (2n-1)^2 = \frac{4n^3 - n}{3}$$

Herleitung der Summenformel für die **ungerade quadratische Pyramidenzahl**:

$$\sum_{i=1}^n (2i-1)^2 = \sum_{i=1}^n (4i^2 - 4i + 1) = 4 \sum_{i=1}^n i^2 - 4 \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n 1$$

$$= 4 \sum_{i=1}^n i^2 = 4 \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} - 4 \sum_{i=1}^n i = 4 \frac{n(n+1)}{2} + \sum_{i=1}^n 1 = n$$

$$= \frac{4n^3 + 6n^2 + 2n}{3} - 2n(n+1) + n = \frac{4n^3 + 6n^2 + 2n - 6n(n+1) + 3n}{3}$$

$$= \frac{4n^3 + 4n + 3n}{3} = \frac{4n^3 - n}{3}$$

Dokumente aus der Erprobung in einer dritten Klasse (eine Zahlraumerweiterung über den ZR 100 hatte noch nicht stattgefunden):

Höhe	So zähle ich geschickt	Anzahl
2	 $2 \cdot 2 + 1 = 5$	5
3	$3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 1 = 14$	14
4	$4 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 1 = 30$	30
5	$5 \cdot 5 + 4 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 1 = 55$	55
6	$6 \cdot 6 + 5 \cdot 5 + 4 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 1 = 91$	91
7	$7 \cdot 7 + 6 \cdot 6 + 5 \cdot 5 + 4 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 1 = 140$	140

2) Erkläre Kleopatra, wieso deine Zählweise geschickt ist:

weil es immer höher geht

1) Entwirf eine eigene Pyramide. Achte auf die Bauregeln!

Höhe	So zähle ich geschickt	Anzahl
2	$2 + 1 = 3$	3
3	$3 + 2 + 1 = 6$	6
4	$4 + 3 + 2 + 1 = 10$	10
5	$5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$	15
6	$6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$	21
7	$7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$	

2) Erkläre Kleopatra, wieso deine Zählweise geschickt ist:

Wir rechnen +

